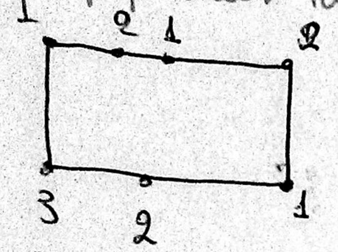
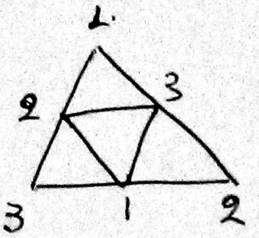
ΜΑΘΗΜΑ: 8ο

Χρωματισμός (colouring)

Χρωματισμός ενός γράφου είναι η απόδοση χρωμάτων στις κορυφές του έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα. Το σύνολο των κορυφών που έχουν το ίδιο χρώμα αποτελούν μια χρωματική τάξη που προφανώς οι χρωματικές τάξεις είναι ξένες μεταξύ τους.

Να χρωματιστούν τα γραφήματα





$\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_4, v_6\}$, $\{v_7\}$ $\qquad$ $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_6\}$

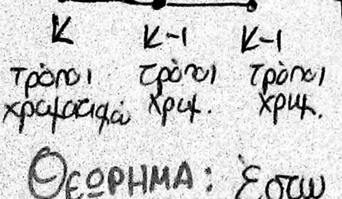
Ένας γράφος G χωρίς βρόχους, ονομάζεται κ-χρωματίσιμος αν μπορεί να χρωματιστεί με κ χρώματα. Αν ο G είναι κ-χρωματίσιμος αλλά δεν είναι $(\kappa-1)$χρωματίσιμος τότε ονομάζεται κ-χρωματικός

Το κ λέγεται χρωματικός αριθμός και συμβολίζεται $\chi(G)$

Ένας γράφος G λέγεται κρίσιμος αν $\chi(H) \subset \chi(G) \quad \forall H \subset G$

Χρωματικά Πολυώνυμα

Χρωματική συνάρτηση ή χρωματικό πολυώνυμο ονομάζεται ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να χρωματιστούν οι κορυφές ενός γράφου G με κ χρώματα και συμβολίζεται με $P_G(\kappa)$



$P_G(\kappa)=\kappa(\kappa-1)^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω ότι $\underbrace{u \text{ και}}_{\text{ακμή}}$ w είναι μη γειτονικές κορυφές ενός απλού γράφου G

Αν $G_1 = G+(u,w)$ και $\underbrace{G_2 = G/(u,w)}_{\text{συστολή}}$

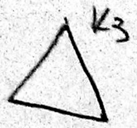
Τότε ισχύει $P_G(\kappa) = P_{G_1}(\kappa) + P_{G_2}(\kappa)$

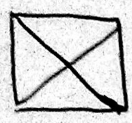
Αποδεικνύεται ότι χρωματικό πολυώνυμο ενός πλήρους γραφήματος είναι: $P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$

Αν είναι δέντρο T:

$$P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

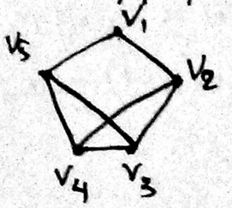
 K_3 $\quad P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)$

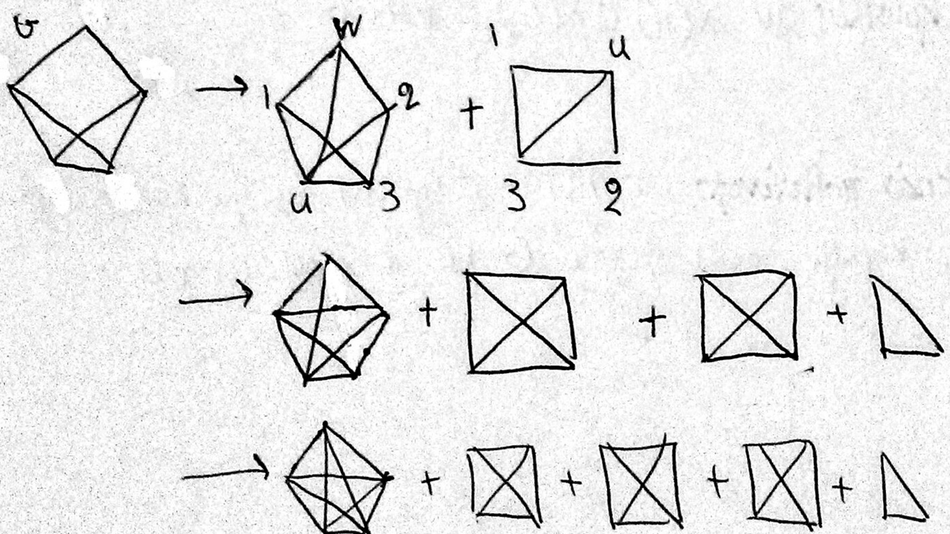
 K_4 $\quad P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$

ΑΣΚΗΣΗ: (Περσινό Θέμα)

Να βρεθεί το χρωματικό πολυώνυμο του γράφου G, όπου

G :





$$P_{K_5}(k) + 3P_{K_4}(k) + P_{K_3} = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) + 3\left[k(k-1)(k-2)(k-3)\right] + k(k-1)(k-2)$$

Εύρεση χρωματικού πολυωνύμου

Να βρεθεί το χρωματικό πολυώνυμο του γράφου

(Το πολυώνυμο θα είναι 4ου βαθμού)

Άσκηση για την άλλη φορά.